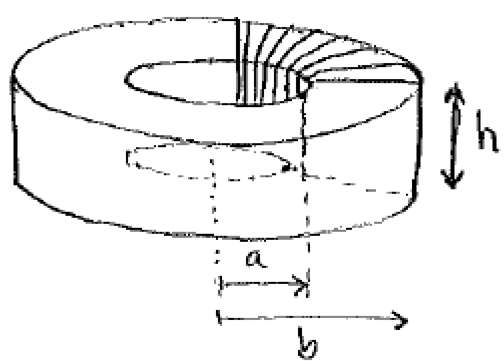
Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Física
FIS1533 Electricidad y Magnetismo
Profesor: Máximo Bañados
Ayudante: Felipe Canales, correo: facanales@uc.cl

Ayudantía 22

Vimos que la inductancia mutua es $\Phi_2 = M_{12} I_1$, Pero la inductancia de una bobina sobre si misma tenemos (donde L es la autoinductancia) $\Phi = \mathrm{LI}$. Entonces la fuerza electromotriz que siente el inductor o bobina es

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -L\frac{dI}{dt}$$

Problema 1. Calcule la autoinductancia de un toroide de sección transversal cuadrada de radio interior a y radio exterior b.



Primero calculemos el campo magnético al interior del toroide por ley de Ampere

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = \mu_0 I \quad \Rightarrow \quad 2\pi B r = \mu_0 I N \quad \Rightarrow \quad \vec{B} = \frac{\mu_0 I N}{2\pi r}\hat{\theta}$$

Entonces el flujo sobre cada espira del toroide será

$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int_a^b \int_0^h \frac{\mu_0 I N}{2\pi r}\hat{\theta} \cdot \hat{\theta}\, dz\, dr = \frac{\mu_0 I N h}{2\pi r}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Entonces el flujo sobre todo el toroide es

$$\Phi_T = N\Phi_B = \frac{\mu_0 I N^2 h}{2\pi r}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Entonces la autoinductancia del toroide es

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi r} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Problema 2. Se tiene un circuito RL y un circuito R, ambos inicialmente con el interruptor desconectado. Compare las corrientes en función del tiempo entre los circuitos cuando se cierra el interruptor ¿Para qué valores de L el circuito RL se parece mas al circuito R?

La ecuación de malla para el circuito RL y circuito con solo una resistencia es respectivamente:

$$V = V_R = IR \qquad\qquad V = V_R + V_L = IR + L\frac{dI}{dt}$$

Escribimos todo en términos de la corriente

$$I = \frac{V}{R} \qquad\qquad \frac{dI}{dt} + I\frac{R}{L} - \frac{V}{L} = 0$$

En el circuito con solo una resistencia, la corriente es constante en el tiempo y está dada por

$$I_{(t)} = \frac{V}{R}$$

En el circuito RL tenemos una ecuación diferencial lineal de primer orden para la intensidad, la cual resolvemos por separación de variables

$$\frac{dI}{dt} = \frac{V - IR}{L} \quad \Rightarrow \quad \frac{dI}{\frac{V - IR}{L}} = dt$$

Integramos

$$-\frac{L}{R}\ln\left(\frac{V - IR}{L}\right) = t + C$$

Despejando y tomando la exponencial

$$\frac{V - IR}{L} = Ce^{-Rt/L}$$

Despejando I

$$I_{(t)} = Ce^{-Rt/L} + \frac{V}{R}$$

La constante C la obtenemos de condiciones iniciales ($I_{(0)} = 0$)

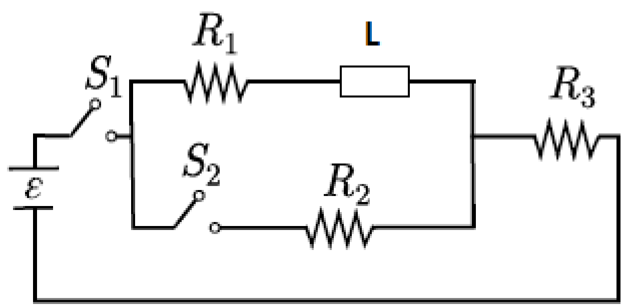
$$I_{(0)} = 0 = C + \frac{V}{R} \quad \Rightarrow \quad C = -\frac{V}{R}$$

Entonces la corriente en función del tiempo para el circuito RL es

$$I_{(t)} = \frac{V}{R}\left(1 - e^{-Rt/L}\right)$$

Vemos que para $L \longrightarrow 0$, la corriente sería igual que la del circuito con solo una resistencia

Problema 3. Considere el sistema de la figura. En el instante $t < 0$, los interruptores están abiertos. En el instante $t = 0$, se cierra S_1, quedando S_2 abierto. Luego, en un instante $t_0 \gg 0$, se cierra S_2. A tiempo t_1, repentinamente ε se hace 0 y se abre el interruptor S_2. Encuentre la corriente para todo t en R_3.



Como ambos interruptores están abiertos

$$I_{(t)} = 0 \quad t < 0$$

Al cerrar S_1, la corriente en función del tiempo nos queda (según la solución del problema anterior)

$$I_{(t)} = \frac{\varepsilon}{R_1 + R_3}\left(1 - e^{-(R_1+R_3)t/L}\right) \quad 0 < t < t_0$$

Como tenemos que $t_0 \gg 0$, podemos aproximar la exponencial a 0, y el sistema se comportará como si la inductancia no estuviera, por lo que la intensidad de la corriente es

$$I_{(t)} = \frac{\varepsilon}{R_T}$$

La resistencia total es

$$R_T = R_3 + \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{R_3(R_1 + R_2) + R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Entonces la corriente es

$$I_{(t)} = \frac{\varepsilon(R_1 + R_2)}{R_3(R_1 + R_2) + R_1 R_2} \qquad t_0 < t < t_1$$

Cuando se abre S_2, la corriente en R_2 es 0 y la ecuación de malla queda

$$L\frac{dI}{dt} + I(R_1 + R_2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dI}{dt} + I\frac{(R_1 + R_2)}{L} = 0$$

Separamos variables

$$\frac{dI}{I\frac{(R_1 + R_2)}{L}} = -dt$$

Integrando

$$\frac{L}{R_1 + R_2}\ln\left(I\frac{(R_1 + R_2)}{L}\right) = -t + C$$

Despejando y tomando la exponencial

$$I\frac{(R_1 + R_2)}{L} = Ce^{-(R_1+R_2)t/L}$$

Despejando I

$$I_{(t)} = Ce^{-(R_1+R_2)t/L}$$

La constante C la obtenemos de condiciones iniciales ($I_{(0)} = \frac{\varepsilon(R_1+R_2)}{R_3(R_1+R_2)+R_1R_2} = C$)

$$I_{(t)} = \frac{\varepsilon(R_1 + R_2)}{R_3(R_1 + R_2) + R_1 R_2}e^{-(R_1+R_2)(t-t_1)/L} \qquad t_1 < t$$

Problema 4. Demuestre que $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}$

De la ley de Faraday tenemos que

$$-\frac{d}{dt}\int \vec{\mathrm{B}} \cdot d\vec{A} = \oint \vec{\mathrm{E}} \cdot d\vec{l}$$

Por teorema de Stoke tenemos que

$$\int -\frac{d\vec{\mathrm{B}}}{dt} \cdot d\vec{A} = \int \vec{\nabla} \times \vec{\mathrm{E}} \cdot d\vec{A}$$

Como esa relación se debe cumplir para cualquier área, necesariamente debemos tener

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathrm{E}} = -\frac{d\vec{\mathrm{B}}}{dt}$$